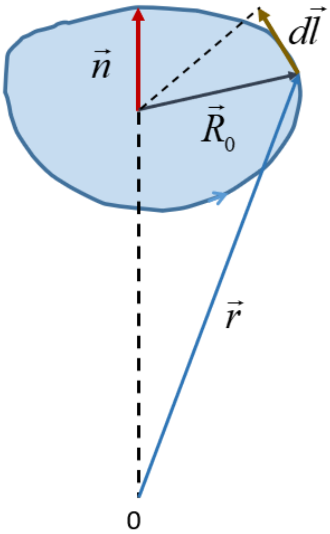
Лекція № 26

7.3.1. Магнітний момент плаского контуру зі струмом

Застосуємо формулу (7.15) для плаского контуру зі струмом. Замість інтегралу по об’єму матимемо криволінійний інтеграл $\vec{j}dV' \to J d\vec{l}$ (див. рис.)



$$\vec{m}_k = \frac{J}{2c}\oint_K \left[\vec{r}, d\vec{l}\right] = \frac{J}{2c}\oint_K \left[\vec{R}_0, d\vec{l}\right]$$

Векторний добуток $\left[\vec{r}, d\vec{l}\right] = \left[\vec{R}_0, d\vec{l}\right]$ не залежить від вибору початку координат. Окрім того, для плаского контуру

$$\frac{1}{2}\left[\vec{R}_0, d\vec{l}\right] = dS_\vartriangle \vec{n}$$

Тут $dS_\vartriangle$ – площа нескінченно малого прямокутного трикутника з катетами R_0, dl.

$$\vec{m}_k = \frac{J}{c}\oint_K \frac{1}{2}\left[\vec{R}_0, d\vec{l}\right] = \frac{J}{c}\int \vec{n} dS = \frac{JS\vec{n}}{c}.$$

Отримали відому формулу для магнітного моменту плаского контуру із постійним струмом

$$\vec{m}_k = \frac{JS\vec{n}}{c}. \qquad (7.17)$$

7.3.2. Магнітний момент для системи рухомих точкових зарядів

Підставимо в загальну формулу для магнітного моменту об'ємних струмів (7.15) вираз для густини струму (5.19) системи точкових зарядів

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon} = \sum_a e_a \vec{\upsilon}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a).$$

Маємо

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\iiint\limits_V \left[\vec{r}', \sum_a e_a \vec{\upsilon}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a) \right] dV' = \frac{1}{2c}\sum_a e_a \left(\iiint\limits_V [\vec{r}', \vec{\upsilon}'] \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a) dV' \right) =$$

$$= \frac{1}{2c}\sum_a e_a [\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a];$$

$$\vec{m} == \frac{1}{2c}\sum_a e_a [\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a]. \tag{7.18}$$

7.3.3. Зв'язок між магнітним та механічним моментами

Згадаємо зв'язок швидкості з імпульсом та масою та визначення нерелятивістського моменту імпульсу (кутового моменту) у нерелятивістському випадку

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{e_a}{m_a}[\vec{r}_a, m_a\vec{\upsilon}_a] = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{e_a}{m_a}[\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{e_a}{m_a}\vec{L}_a.$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{e_a}{m_a}\vec{L}_a. \tag{7.19}$$

Тут $\vec{p}_a = m_a \vec{\upsilon}_a$ – нерелятивістський імпульс частинки; $\vec{L}_a = [\vec{r}_a, \vec{p}_a]$ – нерелятивістський момент імпульсу частинки.

Для системи однакових нерелятивістських частинок, або для нерелятивістських частинок з однаковим відношенням заряду до маси $\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m_e} = const$ отримуємо наступний зв'язок між магнітним та механічним моментами системи частинок

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{e_a}{m_a}\vec{L}_a = \frac{e}{2m_e c}\sum_a \vec{L}_a = \frac{e}{2m_e c}\vec{L};$$

$$\vec{m} = \frac{e}{2m_e c}\vec{L}. \tag{7.20}$$

Тут $\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a$ – повний нерелятивістський момент системи нерелятивістських заряджених частинок.

Гіромагнітне відношення

$$g = \frac{e}{2m_e c}. \tag{7.21}$$

7.3.4. Напруженість магнітного поля точкового магнітного диполя

Розрахуємо напруженість поля точкового диполя за загальною формулою зв'язку напруженості із векторним потенціалом

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{rot}\frac{[\vec{m},\vec{r}]}{r^3} = \left[\nabla, \frac{1}{r^3}[\vec{m},\vec{r}]\right] = \frac{1}{r^3}\left[\nabla,[\vec{m},\vec{r}]\right] - \left[[\vec{m},\vec{r}], \nabla\frac{1}{r^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^3}\left(\vec{m}\underbrace{(\nabla,\vec{r})}_{=3} - \underbrace{(\vec{m},\nabla)\vec{r}}_{\vec{m}}\right) + 3\left[[\vec{m},\vec{r}], \frac{1}{r^4}\underbrace{\nabla r}_{\frac{\vec{r}}{r}}\right] =$$

$$= \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5}\left[[\vec{m},\vec{r}],\vec{r}\right] =$$

$$= \frac{2\vec{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5}\left[\vec{r},[\vec{m},\vec{r}]\right] = \frac{2\vec{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5}\left(\vec{m}r^2 - (\vec{m},\vec{r})\vec{r}\right) = \frac{3(\vec{m},\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}.$$

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{m},\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}. \tag{7.22}$$

Отримана формула (7.22) цілком збігається з формулою для напруженості електричного поля точкового електричного диполя (6.44) з дипольним моментом $\vec{d}$.

7.4. Сила Ампера

Скористаємось формулою для магнітної частини сили Лоренца, щоб знайти силу, яка діє на струм з боку зовнішнього магнітного поля. Нагадаємо цю формулу (див. ф-лу (4.14))

$$\vec{F}_{Лоренца} = \underbrace{e\vec{E}}_{ел.} + \underbrace{\frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}]}_{магн.}.$$

$$\vec{F}_{магн.} = \frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}].$$

Нехай кількість зарядів в елементарному об’ємі dV дорівнює $n_e dV$, де n_e – концентрація зарядів. На кожен заряд діє із боку зовнішнього поля $\vec{H}$ сила Лоренца $\vec{F}_{магн.} = \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$. Сумарна сила, що діє на всі заряди в елементарному об’ємі dV

$$d\vec{F} = \vec{F}_{магн.} n_e dV = \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] n_e dV = \frac{1}{c}[\underbrace{e n_e \vec{v}}_{\vec{j}}, \vec{H}] dV = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{H}] dV.$$

На об’ємний провідник зі струмом із густиною $\vec{j}$ в елементі об’єму dV діє сила

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{H}] dV. \tag{7.23}$$

Пристосуємо цю формулу для випадку для лінійного струму:

$$\vec{j} dV = j\vec{k} dS dl = j dS \vec{k} dl = \underbrace{j dS}_{J} d\vec{l} = J d\vec{l}.$$

Ввели силу струму $J = jdS$ та направлений елемент струму $d\vec{l}$. Тепер сила, що діє з боку зовнішнього поля на лінійний елемент струму має такий вигляд

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{H}] dV = \frac{1}{c}[j dS d\vec{l}, \vec{H}] = \frac{J}{c}[d\vec{l}, \vec{H}];$$

$$d\vec{F} = \frac{J}{c}[d\vec{l}, \vec{H}]. \tag{7.24}$$

Можна ввести густину сили Ампера для об’ємного струму

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{H}]. \tag{7.25}$$

7.5. Енергія стаціонарних струмів

Енергія електромагнітного поля (5.35) за відсутності електричної частини напруженості в разі постійного магнітного поля визначається через напруженість магнітного поля так

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint\left(\cancel{\vec{E}^2} + \vec{H}^2\right) dV = \frac{1}{8\pi}\iiint \vec{H}^2 dV.$$

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint \vec{H}^2 dV. \tag{7.26}$$

Проведемо наступні перетворення

$$\vec{H}^2 = \left(\vec{H},\vec{H}\right) = \left(\vec{H},\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \mathrm{div}\left[\vec{H},\vec{A}\right] + \left(\vec{A},\mathrm{rot}\vec{H}\right)$$

Тут використали формулу для дивергенції векторного добутку двох довільних векторів

$$\mathrm{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\nabla,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) = \left(\vec{b},\left[\nabla,\vec{a}\right]\right) - \left(\vec{a},\left[\nabla,\vec{b}\right]\right);$$

$$\left(\vec{b},\left[\nabla,\vec{a}\right]\right) = \left(\nabla,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) + \left(\vec{a},\left[\nabla,\vec{b}\right]\right);$$

$$\left(\vec{b},\mathrm{rot}\vec{a}\right) = \left[\vec{a},\vec{b}\right] + \left(\vec{a},\mathrm{rot}\vec{b}\right).$$

Тепер

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{div}\left[\vec{H},\vec{A}\right]dV + \frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{A},\mathrm{rot}\vec{H}\right)dV =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{8\pi}\oint\!\!\!\oint_{S_\infty}\left[\vec{H},\vec{A}\right]d\vec{S}}_{=0} + \frac{1}{8\pi}\iiint_V\left(\vec{A},\underbrace{\mathrm{rot}\vec{H}}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}}\right)dV = \frac{1}{2c}\iiint_V \vec{j}\vec{A}dV$$

Отримали формулу

$$w = \frac{1}{2c}\iiint_V \vec{j}\vec{A}dV \tag{7.27}$$

Енергію стаціонарних струмів можна написати двома способами

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint \vec{H}^2 dV = \frac{1}{2c}\iiint_V \vec{j}\vec{A}dV \tag{7.28}$$

При використанні напруженості магнітного поля інтеграл береться по усьому простору, при використанні густини струму та векторного потенціалу – по скінченному об'єму, в якому є струми. Отримані формули дуже схожі на формули для енергії електростатичного поля (див. ф-ли (6.50) та (6.51))

7.6. Енергія і сили у зовнішньому магнітному полі

Виводи формул аналогічні випадку електростатичного поля (параграфи 6.8 та 6.8.1). Наведемо тільки відповіді.

Для випадку повільної зміни магнітного поля енергія взаємодії струмів із зовнішнім магнітним полем у дипольному наближенні

$$U_m = -\vec{m}\vec{H}. \tag{7.29}$$

Сила, яка діє на магнітний диполь:

$$\vec{F}_m = -\nabla U = (\vec{m}, \nabla)\vec{H}. \tag{7.30}$$

Нехай система зарядів знаходиться у постійному магнітному полі. Довели раніш, що середнє значення похідної від скінченної функції часу дорівнює нулю. Це означає, що середня сила, яка діє на систему зарядів, що рухаються стаціонарно дорівнює нулю (див. ф-лу (7.1)):

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\sum_a e_a\left[\vec{\upsilon}_a, \vec{H}\right] = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum_a e_a\left[\vec{r}_a, \vec{H}\right];$$

$$\overline{\vec{F}} = \frac{1}{c}\overline{\frac{d}{dt}\sum_a e_a\left[\vec{r}_a, \vec{H}\right]} = 0.$$

Шукаємо тепер середній момент сили за формулою класичної механіки

$$\vec{N} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$$

$$\vec{N} = \sum_a\left[\vec{r}_a, \frac{e_a}{c}\left[\vec{\upsilon}_a, \vec{H}\right]\right] = \sum_a \frac{e_a}{c}\left[\vec{r}_a, \left[\vec{\upsilon}_a, \vec{H}\right]\right] =$$
$$= \sum_a \frac{e_a}{c}\left(\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a, \vec{H}) - \vec{H}(\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a)\right) = \sum_a \frac{e_a}{c}\left(\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a, \vec{H}) - \vec{H}\frac{d}{dr}\left(\frac{r_a^2}{2}\right)\right). \tag{7.31}$$

Після усереднення по часу

$$\overline{\vec{N}} = \sum_a \frac{e_a}{c}\left(\overline{\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a, \vec{H})} - \vec{H}\underbrace{\overline{\frac{d}{dr}\left(\frac{r_a^2}{2}\right)}}_{=0}\right) = \sum_a \frac{e_a}{c}\overline{\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a, \vec{H})}.$$

Отримуємо формулу

$$\overline{\vec{N}} = \sum_a \frac{e_a}{c}\overline{\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a, \vec{H})}.$$

В цій формулі можна перейти від суми по точковим зарядам до інтегрування по об'єму

$$\overline{\vec{N}} = \frac{1}{c}\iiint_V \vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{r}\,', \vec{H})dV'. \tag{7.32}$$

Порівняння формули (7.32) з формулою для векторного потенціалу в дипольному наближенні (7.14)

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{1}{cr^3}\iiint_V \vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{r}\,', \vec{r})dV'.$$

дозволяє переписати (7.32) так:

$$\overline{\vec{N}} = \frac{1}{2c}\iiint_V \left[\left[\vec{r}', \vec{j}\right], \vec{r}\right] dV' = \left[\vec{m}, \vec{H}\right].$$

Момент сили:

$$\vec{N} = \left[\vec{m}, \vec{H}\right]. \tag{7.33}$$

Енергія взаємодії двох точкових диполів:

$$U_{m-m} = -\vec{m}_1\vec{H}_2 = \frac{(\vec{m}_1, \vec{m}_2)r_{12}^2 - 3(\vec{m}_1, \vec{r}_{12})(\vec{m}_2, \vec{r}_{12})}{r_{12}^5}. \tag{7.34}$$

7.7. Теорема Лармора

В функції Лагранжа системи зарядів, які знаходяться в постійному однорідному магнітному полі, з'являється додатковий член, який можна вивести безпосередньо із загального вигляду функції Лагранжа системи зарядів в зовнішньому полі

$$L_H = \sum_a \frac{e_a}{c}\left(\vec{A}_a, \vec{v}_a\right).$$

Обираємо калібрування

$$\vec{A}_a = \frac{1}{2}\left[\vec{H}, \vec{r}_a\right],$$

яке можливо для $\vec{H} = const$. Маємо

$$L_H = \sum_a \frac{e_a}{c}\left(\frac{1}{2}\left[\vec{H}, \vec{r}_a\right], \vec{v}_a\right) = \left(\underbrace{\sum_a \frac{1}{2c} e_a\left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right]}_{\vec{m}}, \vec{H}\right) = (\vec{m}, \vec{H}).$$

Функція Лагранжа системи рухомих зарядів, які знаходяться у зовнішньому постійному магнітному полі, в ІСВ, що покоїться, складається із таких членів

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \left(\vec{m}, \vec{H}\right) - U \tag{7.35}$$

Кінетичної енергії всіх зарядів, енергії взаємодії їх із магнітним полем та потенціальної енергії взаємодії із електричним полем.

Розглянемо рух системи нерелятивістських зарядів з $v \ll c$, які рухаються у центральному полі, що створює нерухома частинка. Рух дослідимо у системі відліку, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = const$ навколо осі, що проходить через нерухому частинку. Швидкості в нерухомій системі відліку $\vec{v}_a'$

та в системі відліку, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$, $\vec{v}_a$ пов'язані формулою

$$\vec{v}'_a = \vec{v}_a + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]. \qquad (7.36)$$

Функція Лагранжа системи рухомих зарядів у нерухомій системі відліку через величини рухомої системи

$$L_m = \sum_a \frac{m_a v'^2_a}{2} - U = \sum_a \frac{m_a}{2}\left(\vec{v}_a + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]\right)^2 - U.$$

Нехай $\vec{\Omega} = \frac{e_a}{2m_a c}\vec{H}$, $\frac{e_a}{m_a} = const$, а магнітне поле досить мале, тому членами H^2 можна знехтувати:

$$L_m = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a m_a\left(\vec{v}_a, \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]\right) - U = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \cancel{m_a}\left(\vec{v}_a, \left[\frac{e_a}{2\cancel{m_a}c}\vec{H}, \vec{r}_a\right]\right) - U =$$

$$= \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{2c}\sum_a e_a\left(\vec{v}_a, \left[\vec{H}, \vec{r}_a\right]\right) - U = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{2c}\sum_a e_a\left(\left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right], \vec{H}\right) - U =$$

$$= \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \left(\frac{1}{2c}\sum_a e_a\left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right], \vec{H}\right) - U = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \left(\vec{m}, \vec{H}\right) - U$$

Отримали в системі відліку, що обертається із кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \frac{e_a}{2m_a c}\vec{H}$

$$L_m = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \left(\vec{m}, \vec{H}\right) - U \qquad (7.37)$$

формулу для функції Лагранжа, яка збігається із формулою функції Лагранжа в нерухомій системі відліку (7.35), в якій заряди рухаються в магнітному зовнішньому полі й центрально симетричному полі нерухомої частинки. Радіус-вектори зарядів в обох системах у нерелятивістському випадку співпадають $\vec{r}'_a = \vec{r}_a$.

Теорема Лармора: поведінка нерелятивістської системи зарядів із однаковим відношенням заряду до маси $\left(\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m}\right)$ в центрально-симетричному електричному полі та слабкому постійному однорідному магнітному полі еквівалентна поведінці цієї ж системи в тому ж електричному полі в системі відліку, яка обертається з кутовою швидкістю (частотою) $\vec{\Omega} = \frac{e}{2mc}\vec{H}$.

Тобто, при накладанні слабкого магнітного поля система зарядів, яка знаходиться в центрально-симетричному електричному полі починає обертатися, як ціле з кутовою швидкістю (частотою) $\vec{\Omega} = \dfrac{e}{2mc}\vec{H}$. Цю частоту називають ларморова частота.

Обертальний рух описується рівнянням моментів

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \left[\vec{m}, \vec{H}\right]; \quad \vec{m} = \frac{e}{2mc}\vec{L}.$$

Врахували зв'язок магнітного та механічного моментів для системи зарядів з $\dfrac{e_a}{m_a} = \dfrac{e}{m} = const$ (ф-ла (7.20)). Далі

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{e}{2mc}\vec{L}, \vec{H}\right] = \left[\vec{L}, \frac{e}{2mc}\vec{H}\right] = -\left[\frac{e}{2mc}\vec{H}, \vec{L}\right] = -\left[\vec{\Omega}, \vec{L}\right].$$

Отримали рівняння ларморової прецесії

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\left[\vec{\Omega}, \vec{L}\right]. \tag{7.38}$$

згідно з яким система нерелятивістських частинок, які знаходяться в центрально-симетричному електричному полі та слабкому постійному магнітному полі обертаються, як ціле навколо $\vec{H}$. Абсолютна величина L та кут між $\vec{L}$ та $\vec{H}$ зберігаються. Додаткова умова справедливості рівняння однорідної прецесії (7.38)– великі швидкості обертання в електричному полі у порівняння із ларморівською частотою – $\Omega \ll \omega$.

8. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

8.1. Хвильове рівняння

Розглянемо рівняння Максвелла (5.29)

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases}$$

у відсутності зарядів та струмів $\rho = 0,\ \vec{j} = 0$:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{8.1}$$

Отримаємо рівняння для $\vec{E}$ та для $\vec{H}$. Беремо ротор від обох частин роторного рівняння першої пари та підставляємо в праву частину роторне рівняння другої пари:

$$\mathrm{rotrot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right); \quad \mathrm{rotrot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right);$$

$$\left[\nabla\left[\nabla, \vec{E}\right]\right] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \nabla\underbrace{\left(\nabla, \vec{E}\right)}_{\mathrm{div}\vec{E}=0} - \underbrace{\left(\nabla, \nabla\right)}_{\nabla^2=\Delta}\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2};$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Це однорідне хвильове рівняння

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{8.2}$$

Аналогічно

$$\mathrm{rotrot}\vec{H} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right); \quad \mathrm{rotrot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right);$$

$$\left[\nabla\left[\nabla, \vec{H}\right]\right] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}; \quad \nabla\underbrace{\left(\nabla, \vec{H}\right)}_{\mathrm{div}\vec{H}=0} - \underbrace{\left(\nabla, \nabla\right)}_{\nabla^2=\Delta}\vec{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2};$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Однорідне хвильове рівняння

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{8.3}$$

Тепер шукаємо рівняння для потенціалів. Найбільш зручно обрати калібрування

$$\varphi = 0; \quad \mathrm{div}\vec{A} = 0. \tag{8.4}$$

Підставимо загальні вирази для напруженостей через потенціали

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$